

УДК 534.231.1

С.М. Балабаев

Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

РАСЧЕТ ИМПУЛЬСНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СИСТЕМЕ УПРУГИЙ СЛОЙ – ЖИДКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Методом интегральных преобразований решена осесимметричная задача о возбуждении импульсных акустических полей в системе упругий слой – жидкое полупространство. Применено преобразование Фурье по временной переменной и преобразование Бесселя по пространственной переменной. Решения для потенциалов смещения волновых полей получены в виде двукратных интегралов. Обсуждены методы вычисления полученных интегралов.

Ключевые слова: импульсные акустические поля, метод интегральных преобразований, дисперсионные уравнения.

S.M. Balabaev

CALCULATION OF THE IMPULSIVE ACOUSTIC FIELDS IN THE SYSTEM AN ELASTIC LAYER – LIQUID HALF-SPACE

The method of integral transformations is used to solve an axisymmetrical problem about excitation of the impulsive acoustic fields in the system an elastic layer – liquid half-space. Transformation of Fourier on a temporal variable and transformation of Bessel on a spatial variable are applied. Decision for potentials of displacement of the wave fields got as double integrals. The methods of calculation of the got integrals are discussed.

Key words: impulsive acoustic fields, method of integral transformations, dispersion equations.

При решении ряда практических задач возникает необходимость расчета волновых импульсных полей в системе *упругий слой – жидкое полупространство*. Подобная ситуация имеет место в акустическом методе неразрушающего контроля металлических листов (или труб большого диаметра), находящихся в одностороннем контакте с жидкостью. Одним из вариантов этой задачи является также анализ системы *лед – вода* при импульсном воздействии на поверхность льда. Измерения скорости и формы акустических импульсов дают полезную информацию о прочностных характеристиках льда. Это важно, например, при выборе места для ледовых аэродромов, дрейфующих полярных станций и т. д.

Рассмотрим осесимметричную задачу в цилиндрических координатах r, α, z . Слой толщиной $2l$ ограничен координатными поверхностями $z = \pm l$. На конечном участке верхней поверхности слоя задано внешнее воздействие $\sigma_{zz}(r, -l, t) = \sigma(r)f(t)$, σ_{ik} – тензор напряжений; t – время; $\sigma(r)$ – закон распределения нормального напряжения; $f(t)$ – форма импульса. Параметры материала слоя: ρ – плотность; c_l – скорость продольной волны; c_t – скорость поперечной волны. По поверхности $z = l$ слой граничит с жидким полупространством с параметрами: ρ_1 – плотность; c_1 – скорость продольной волны. Необходимо определить импульсные волновые поля в слое и полупространстве.

Введем скалярный $\varphi = \varphi(r, z, t)$ и векторный $\psi = \psi(r, z, t)$ ($\psi \equiv \psi_\alpha$) потенциалы смещения поля в слое. Эти потенциалы и потенциал смещения поля в полупространстве $\varphi_1 = \varphi_1(r, z, t)$ должны удовлетворять волновым уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} &= \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

и системам граничных условий:

$$\begin{cases} \sigma_{rz} = 0, \\ \sigma_{zz} = \sigma(r)f(t), \end{cases} \text{ при } z = -l; \quad \begin{cases} \sigma_{rz} = 0, \\ \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(1)}, \\ u_z = u_z^{(1)}, \end{cases} \text{ при } z = l,$$

где σ_{rz} – касательное напряжение; u_z – нормальное смещение. Индекс (1) относится к полупространству.

Выразим компоненту смещения и компоненты напряжений, которые понадобятся в дальнейшем, через потенциалы [1, 2]:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\psi}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right), \end{aligned}$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе.

Для решения поставленной задачи применен метод интегральных преобразований, с использованием преобразования Фурье по временной переменной и преобразования Бесселя по пространственной переменной r :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\varphi}}(k, z, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} \int_0^{\infty} \varphi(r, z, t) r J_0(kr) dr dt, \\ \varphi(r, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \int_0^{\infty} \overline{\overline{\varphi}}(k, z, \omega) k J_0(kr) dk d\omega, \end{aligned}$$

где k, ω – параметры преобразования, имеющие физический смысл волнового числа и круговой частоты. Для векторного потенциала функцию Бесселя нулевого порядка в ядре преобразования нужно заменить на функцию Бесселя первого порядка.

Конечная протяженность области воздействия, а также затухание упругих волн в реальных средах дают основание полагать, что введенные потенциалы вместе со своими частными производными стремятся к нулю при $|t| \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$. Тогда трансформанты решений волновых уравнений (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1(k, z, \omega) &= A_1(k, \omega) \exp(ibz), \\ \bar{\varphi}(k, z, \omega) &= A_2(k, \omega) shcz + A_3(k, \omega) chcz, \\ \bar{\psi}(k, z, \omega) &= A_4(k, \omega) shdz + A_5(k, \omega) chdz, \\ b^2 &= \omega^2 / c_1^2 - k^2, \quad c^2 = k^2 - \omega^2 / c_t^2, \quad d^2 = k^2 - \omega^2 / c_t^2.\end{aligned}\quad (2)$$

Ветвь радикала b выбирается из условия $Jmb > 0$, выбор же ветвей радикалов c и d произволен, поскольку они не дают многозначности в окончательных выражениях.

Постоянные $A_1 - A_5$, входящие в (2), определяются из преобразованной системы граничных условий

$$\sum_{j=1}^5 a_{ij} A_j = B_i, \quad (i=1, \dots, 5), \quad (3)$$

$$\begin{aligned}a_{11} &= a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = a_{25} = a_{32} = a_{35} = 0, \quad a_{12} = 2ckchcl, \quad a_{15} = (2k^2 - k_t^2) chdl, \\ a_{23} &= 2ckshcl, \quad a_{24} = (2k^2 - k_t^2) shdl, \quad a_{31} = a_{41} = \rho_1 \omega^2 \exp(ibl), \quad a_{33} = 2\mu(2k^2 - k_t^2) chcl, \\ a_{34} &= 4\mu kdchdl, \quad a_{42} = \mu(2k^2 - k_t^2) shcl, \quad a_{43} = a_{33} / 2, \quad a_{44} = a_{34} / 2, \quad a_{45} = 2\mu kdshdl, \\ a_{51} &= -ib \exp(ibl), \quad a_{52} = cchcl, \quad a_{53} = cshcl, \quad a_{54} = kshdl, \quad a_{55} = kchdl, \\ B_1 &= B_2 = B_4 = B_5 = 0, \quad B_3 = \bar{\sigma}(k, -l, \omega), \quad \bar{\sigma}(k, -l, \omega) = S(\omega) \bar{\sigma}(k),\end{aligned}$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad \bar{\sigma}(k) = \int_0^{\infty} \sigma(r) r J_0(kr) dr,$$

где $S(\omega)$ – спектральная функция импульса возбуждения; $\bar{\sigma}(k)$ – трансформанта Бесселя закона распределения нормального напряжения.

Решение линейной системы уравнений (3) дает следующие выражения для постоянных:

$$\begin{aligned}A_1(k, \omega) &= \frac{ick_t^2 \bar{\sigma} \exp(-ibl)}{2b\mu F(k, \omega)} \left[4cdk^2 shclchcl - (2k^2 - k_t^2)^2 shdlchdl \right], \\ A_2(k, \omega) &= \frac{(2k^2 - k_t^2) \bar{\sigma} chcl}{2\mu F(k, \omega)} F_1(k, \omega), \quad A_3(k, \omega) = \frac{(k_t^2 - 2k) \bar{\sigma} shdl}{2\mu F(k, \omega)} F_2(k, \omega), \\ A_4(k, \omega) &= \frac{ck \bar{\sigma} shcl}{\mu F(k, \omega)} F_2(k, \omega), \quad A_5(k, \omega) = -\frac{ck \bar{\sigma} chcl}{\mu F(k, \omega)} F_1(k, \omega), \\ F_1(k, \omega) &= F_s(k, \omega) - iD(k, \omega) shclshdl, \quad F_2(k, \omega) = F_a(k, \omega) - iD(k, \omega) chclchdl, \\ D(k, \omega) &= c\rho_1 \omega^2 k_t^2 / (b\mu), \quad F_a(k, \omega) = 4k^2 cdshdlchcl - (2k^2 - k_t^2)^2 shclchdl, \\ F_s(k, \omega) &= 4k^2 cdshclchdl - (2k^2 - k_t^2)^2 shdlchcl,\end{aligned}$$

где $F_a(k, \omega)$ и $F_s(k, \omega)$ – характеристические функции дисперсионных уравнений Рэлея-Лэмба для слоя со свободными границами для антисимметричных и симметричных волн соответственно.

$$F(k, \omega) = F_a(k, \omega)F_s(k, \omega) - i \frac{\rho_1 \omega^2 c}{2b\rho c_t^2} [F_a(k, \omega)shclshdl + F_s(k, \omega)chclchdl] - \text{характеристи-}$$

ческая функция дисперсионного уравнения для слоя, находящегося в одностороннем контакте с полупространством. Нарушение симметрии задачи приводит к тому, что волновые процессы в рассматриваемой системе не распадаются на симметричный и антисимметричный.

Окончательные выражения для искомых потенциалов запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, t) &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} \frac{(2k^2 - k_t^2) \bar{\sigma}(k) k J_0(kr)}{F(k, \omega)} [F_1 chdlshcz - F_2 shdlchcz] dk d\omega, \\ \psi(r, z, t) &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} \frac{ck^2 \bar{\sigma}(k) J_1(kr)}{F(k, \omega)} [F_2 shclshdz - F_1 chclchdz] dk d\omega, \\ \varphi_1(r, z, t) &= \frac{i}{4\pi\rho c_t^4} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \omega^2 e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} \frac{ck \bar{\sigma}(k) J_0(kr)}{bF(k, \omega)} e^{ib(z-l)} \times \\ &\quad \times [4cdk^2 shclchcl - (2k^2 - k_t^2)^2 shdlchdl] dk d\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения (4) описывают все типы акустических волн, возникающих при импульсном воздействии на поверхность упругого слоя. Остаются «непринципиальные» (с точки зрения «чистой» математики) трудности вычисления полученных интегралов. При малом значении параметра kr для вычисления интегралов могут быть применены численные методы. Увеличение kr приводит к увеличению времени вычислений, так как подынтегральные функции быстро осциллируют. В этом случае предпочтительнее применение асимптотических методов, подобных рассмотренным в [3-5]. Преимуществом асимптотических методов является также возможность выделения различных типов волн. Объемные волны выражаются через интегралы по перевальным путям в плоскости комплексного переменного. Вычеты в соответствующих полюсах дают поля нормальных и поверхностных волн. Боковые волны выражаются через интегралы по берегам разрезов, которые могут быть вычислены методом быстрого спуска. Для конкретной формы импульса возбуждения вычисляется его спектральная функция. Зная спектральную функцию, можно вычислить формы импульсов всех типов акустических волн в упругом слое и жидком полупространстве.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. – М.: Наука, 1965. – 203 с.
2. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
3. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 344 с.
4. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. – Л.: Судостроение, 1972. – 352 с.
5. Балабаев С.М. Исследование импульсного режима работы клиновых преобразователей для волн Рэлея и Лэмба: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Л.: Ленинградский ордена Ленина электротехнический институт им. В.И. Ульянова (Ленина), 1976. – 16 с.

Сведения об авторе: Балабаев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор.

УДК 639.2

А.А. Недоступ

Калининградский государственный технический университет,
236000, г. Калининград, Советский проспект, 1

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ РЫБОЛОВСТВА

Приводятся масштабы динамического подобия процессов рыболовства.

Ключевые слова: *рыболовство, динамическое подобие.*

A.A. Nedostup

APPLICATIONS OF THE THEORY OF DYNAMICAL SIMILARITY PHYSICAL PROCESSES IN FISHERIES

The article provides a dynamic scale is similar to the fishery.

Key words: *fishing, dynamical similarity.*

Основной задачей гидромеханики орудий рыболовства является, как известно [1-4], определение силового воздействия между жидкой средой (водой) и движущимся в этой среде орудием рыболовства или его элементом. В большинстве случаев эту задачу приходится решать опытным путем, так как теория в гидродинамике еще не настолько развита, чтобы давать уверенные и достаточно точные для технических целей ответы на многочисленные вопросы проектирования и расчета орудий и процессов рыболовства. Теория может лишь установить общие законы движения и сопротивления среды и решить задачу о силовом воздействии среды и движущегося орудия рыболовства в некоторых простых случаях [5,6]. Так, например, возможно теоретически рассчитать в ряде случаев коэффициенты сопротивления, подъемной и боковой сил траловых досок.

Решать задачи, возникающие в сложных инженерных системах, которыми являются орудия рыболовства, чисто аналитическим путем часто бывает необычайно трудно и даже невозможно из-за большого количества зависимостей и сложностей нелинейных характеристик некоторых зависимостей. Иногда мы не имеем вообще математического описания задачи, так как исследуемое явление, протекающее с орудием рыболовства, настолько сложно, что для него пока еще нет удовлетворительной схемы и нет еще уравнений протекания процессов. Аналитическое решение, или решение дифференциальных уравнений гидродинамики, охватывает ограниченный круг задач. В частности, не всегда можно получить удовлетворительный результат и с помощью численных методов. Наконец, аналитическое решение все равно нуждается в проверке экспериментом с натурным орудием рыболовства или с его моделью. Последнее проще, дешевле, удобнее при исследованиях влияния вариаций различных параметров элементов системы, схемы их соединения и других факторов, влияющих на протекание гидродинамических, грунтодинамических и трибологических процессов.

В процессе проектирования орудий рыболовства нередко возникает необходимость не только математического, но и физического моделирования. В таком случае необходимо, чтобы процессы, протекающие с моделями орудий рыболовства, соответствовали натурным. Это означает, что различные характеристики движения потоков жидкости (для пассивных орудий рыболовства) или орудий рыболовства (для активных орудий рыболовства), которые имеют место в модели и в реальной системе, должны описываться одинаковыми закономерностями, хотя их численные значения могут существенно различаться. В натурной модели они меньше (как правило) или больше (встречается реже), чем в действи-

тельности. Для этого необходимо иметь критерии, которые позволяли ли бы «масштабировать» реальную систему. Эти критерии устанавливаются в теории подобия.

Гидродинамическое подобие – это подобие потоков несжимаемой жидкости, включающее в себя подобие геометрическое, кинематическое и динамическое [7].

В потоках жидкостей обычно действуют разные силы – силы давления, силы вязкого трения, силы тяжести, инерционные силы. Соблюдение пропорциональности всех сил, действующих в потоке, означает полное гидродинамическое подобие. На практике полное гидродинамическое подобие достигается редко, поэтому обычно приходится ограничиваться частичным (неполным) гидродинамическим подобием, при котором имеется пропорциональность лишь основных сил.

Орудия рыболовства имеют формы, значительно более сложные и изменяемые в процессе эксплуатации, чем те, которые доступны для теоретического изучения: ваера, траловые доски, гидродинамические щитки, кухтыли, бобинцы, гидродинамические катушки, поплавки и др. В основном орудия рыболовства представляют собой сложные инженерные сооружения, состоящие из набора элементов и сети. Причем сетная конструкция орудий рыболовства имеет несимметричные формы. Все эти обстоятельства настолько усложняют силовое воздействие орудия рыболовства с водой, что ограничиться средствами теоретического анализа при проектировании и расчете не представляется возможным. Поэтому основное значение приобретает здесь эксперимент. Однако для того, чтобы эксперимент успешно решал поставленную задачу, его постановка и обработка опытных данных должны базироваться на знании общих законов сопротивления среды, выяснение которых является делом теории.

Причина зависимости эксперимента от теории состоит в том, что эксперимент в гидромеханике выполняется обычно не с натурным объектом и не в натуральных условиях, а на модели этого объекта, в условиях, не совпадающих с натурными. Эксперимент при этом должен не просто воспроизводить изучаемое явление, а моделировать это явление так, чтобы затем можно было от данных эксперимента с моделью перейти к натуре.

Натурные объекты, с которыми имеет дело гидромеханика орудий рыболовства: тралы, невода, яруса, сети, промысловые механизмы и др., – слишком сложны, велики по размерам и дорогостоящи для того, чтобы их можно было всякий раз испытывать только в натуральных условиях. Кроме того, необходимость в испытании различных вариантов каждого из перечисленных выше натуральных объектов рыболовства возникает тогда, когда самого объекта еще не существует, а именно в стадии его проектирования и расчета. Эти обстоятельства и привели к широкому использованию в гидромеханике моделей натуральных орудий рыболовства и к испытанию их в лабораторных условиях [3], часто весьма далеких от натуральных. Эксперименты проводятся на специально создаваемых модельных установках, моделирующих определенным образом исследуемые устройства и протекающие в них физические процессы. При физическом моделировании исследуемая модель обычно выполняется в меньшем масштабе, чем оригинал (натура), и воспроизводит изучаемое явление с сохранением его физической природы.

Большое практическое значение приобрела теория физического моделирования, т.е. раздел гидродинамики, разрабатывающий способы определения гидродинамических коэффициентов для натуральных орудий рыболовства путем испытания моделей. Модель всегда должна быть геометрически подобна натурному орудию рыболовства, но так как она обычно имеет иные размеры, чем натурные орудия рыболовства, и может испытываться при иных скоростях и в другой среде, скажем, в воздухе [1-4], то силовое взаимодействие со средой также будет иным, нежели у натурального объекта. Поэтому возникает стремление охарактеризовать силовое взаимодействие объекта и среды безразмерными комбинациями или величинами, которые не зависели бы от абсолютных размеров объекта, скорости его движения, или скорости потока жидкости, плотности среды, вязкости жидкости и других размерных величин. Такие безразмерные величины в гидродинамике называются гидродинамическими коэффициентами.

Для проектирования и расчета натуральных орудий рыболовства весьма важно, чтобы гидродинамические коэффициенты, определенные опытным путем, были такими же, как у натуральных орудий рыболовства; только при этом условии можно применять гидродинамические коэффициенты, полученные на модели, к расчету натурального орудия рыболовства, и следовательно, только таким условием определяется ценность и точность эксперимента. Однако для того, чтобы гидродинамические коэффициенты были одинаковы, недостаточно одного только геометрического подобия модели и натуре. Необходимо соблюдение ряда дополнительных условий, которые являются условиями подобия явлений, возникающих при движении (обтекании) натуральных орудий рыболовства. Выяснение этих условий, которым необходимо руководствоваться для правильной постановки эксперимента, составляет предмет специального раздела гидродинамики – теории размерности и подобия.

Физическое моделирование – ответственная научная задача, имеющая общее принципиальное и познавательное значение, но его нужно рассматривать только как исходную базу для главной задачи. Последняя состоит в фактическом определении законов природы, в отыскании общих свойств и характеристик различных классов явлений, в разработке экспериментальных и теоретических методов исследования и разрешения различных проблем, наконец, в получении систематических материалов, приемов, правил и рекомендаций для решения конкретных практических задач [7].

В настоящей статье впервые приводятся правила динамического подобия орудий процессов рыболовства: гидродинамических, грунтодинамических и трибологических. На основании линейного масштаба получены масштабы всех характеристик. Обоснован масштабный эффект при проведении экспериментов с орудиями рыболовства.

Общий вид критерия подобия динамических процессов, протекающих с орудиями рыболовства, представлен в виде [8]

$$\frac{C_R C_l}{C_t^2 C_m C_w} = 1,$$

где C_R – силовой масштаб; C_l – масштаб геометрических характеристик; C_t – масштаб времени; C_m – масштаб массы; C_w – масштаб ускорения.

В таблице приведены основные масштабы физических характеристик гидродинамических, грунтодинамических и трибологических процессов, протекающих с орудиями рыболовства при динамическом подобии:

Масштабы физических характеристик		Преобразование через масштаб C_l
Физические характеристики	Обозначение	
1	2	3
Геометрический параметр (длина, высота, ширина и др.)	C_l	C_l
Геометрический параметр (площадь)	C_A	C_l^2
Геометрический параметр (объем)	C_V	C_l^3
Геометрический параметр (геометрический момент инерции)	C_I	C_l^4
Масса	C_m	C_l^3
Время	C_t	$C_l^{5/4}$
Скорость	C_v	$C_l^{-1/4}$
Сила	C_R	$C_l^{3/2}$
Ускорение	C_w	$C_l^{-3/2}$
Объемный вес	C_γ	$C_l^{-3/2}$
Момент (вращательный)	$C_{Mб}$	$C_l^{5/2}$
Плотность	C_ρ	1

Окончание таблицы

1	2	3
Динамическая вязкость воды	C_μ	$C_l^{3/4}$
Кинематическая вязкость воды	C_ν	$C_l^{3/4}$
Изгибная жесткость	C_{EI}	$C_l^{7/2}$
Упругость материала	C_E	$C_l^{-1/2}$
Давление	C_p	$C_l^{-1/2}$
Частота оборотов	$C_{\text{об}}$	$C_l^{-5/4}$
Частота колебаний	C_f	$C_l^{-5/4}$
Касательное напряжение	C_σ	$C_l^{-1/2}$
Потенциальная энергия	C_U	$C_l^{5/2}$
Кинематическая энергия	C_{Tn}	$C_l^{5/2}$
Поверхностное натяжение	$C_{\sigma n}$	$C_l^{1/2}$
Сдвиг грунта	$C_{\tau p}$	$C_l^{-1/2}$
Связность грунта	$C_{C\omega}$	$C_l^{-1/2}$
Нормальная нагрузка	$C_{\sigma p}$	$C_l^{-1/2}$
Мощность	C_N	$C_l^{5/4}$
Твердость	$C_{HВ}$	$C_l^{-1/2}$
Угол	$C_\alpha = C_{\phi_{вн}}$	1
Сплошность	C_{Fo}	1
Коэффициент сопротивления (распорной силы, боковой силы)	C_k	1
Коэффициент трения	$C_{\mu d}$	1
Относительное удлинение	C_ε	1

На основании масштабов подобия динамических процессов моделируются гидродинамические, грунтодинамические и трибологические процессы, протекающие с орудиями рыболовства.

Статья подготовлена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-08-00096-а.

Список литературы

1. Баранов Ф.И. Теория и расчет орудий рыболовства. – М.: Пищепромиздат, 1948. – 436 с.
2. Баранов Ф.И. Моделирование рыболовных орудий // Сб. тр. Мосрыбвтуза. – 1957. – Вып. VIII. – С. 127-132.
3. Фридман А.Л. Теория и проектирование орудий промышленного рыболовства. – М.: Легк. и пищ. пром-сть, 1981. – 327 с.
4. Розенштейн М.М., Недоступ А.А. Механика орудий рыболовства. – М.: Моркнига, 2011. – 528 с.
5. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. – М.: Наука, 1964. – 814 с.
6. Федявский К.К., Войткунский Я.И., Фадеев Ю.И. Гидромеханика. – М.: Судостроение, 1968. – 568 с.
7. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
8. Недоступ А.А. Физическое моделирование гидродинамических процессов движения орудий рыболовства // Вест. Томского государственного университета. Математика и механика. – Томск. – 2012. – № 3 (19). – С. 55-68.

Сведения об авторе: Недоступ Александр Алексеевич, кандидат технических наук, проректор по научной работе, зав. кафедрой промышленного рыболовства, e-mail: nedostup@klgtu.ru.

УДК 639.2.081.16

Е.В. Осипов

Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

МЕТОДИКА РАСЧЕТА КОЛЬЦЕВОГО ЯРУСА

Предложена методика расчета кольцевого яруса, позволяющая находить его характеристики во время промысла. При расчете учитывается течение и скорость движения кольцевого яруса.

Ключевые слова: кольцевой ярус, скорость движения яруса, расчет орудия рыболовства.

E.V. Osipov**CALCULATION THE RING LONGLINE**

The paper proposed a method for calculating the circular tiers that allows finding its characteristics during fishing. Taken into account when calculating the flow and the velocity of the circular stage.

Key words: circular stage, speed tiers, calculation tools fishing properties.

Введение

Кольцевой ярус (рис. 1) используется для промысла таких видов, как треска, минтай, терпуг, окунь и др. Эффективность кольцевого яруса заключается в использовании его на скалистых грунтах, над которыми образуются промысловые скопления ценных промысловых рыб, не всегда пригодных для горизонтальных ярусных порядков. Вылов в среднем таким ярусом в подзоне Приморья составляет 1,5-2 т трески в сутки, а расход топлива в 3,5 раза меньше, чем на промысле донным горизонтальным ярусом [1], поэтому развитие данного вида промысла является перспективным.

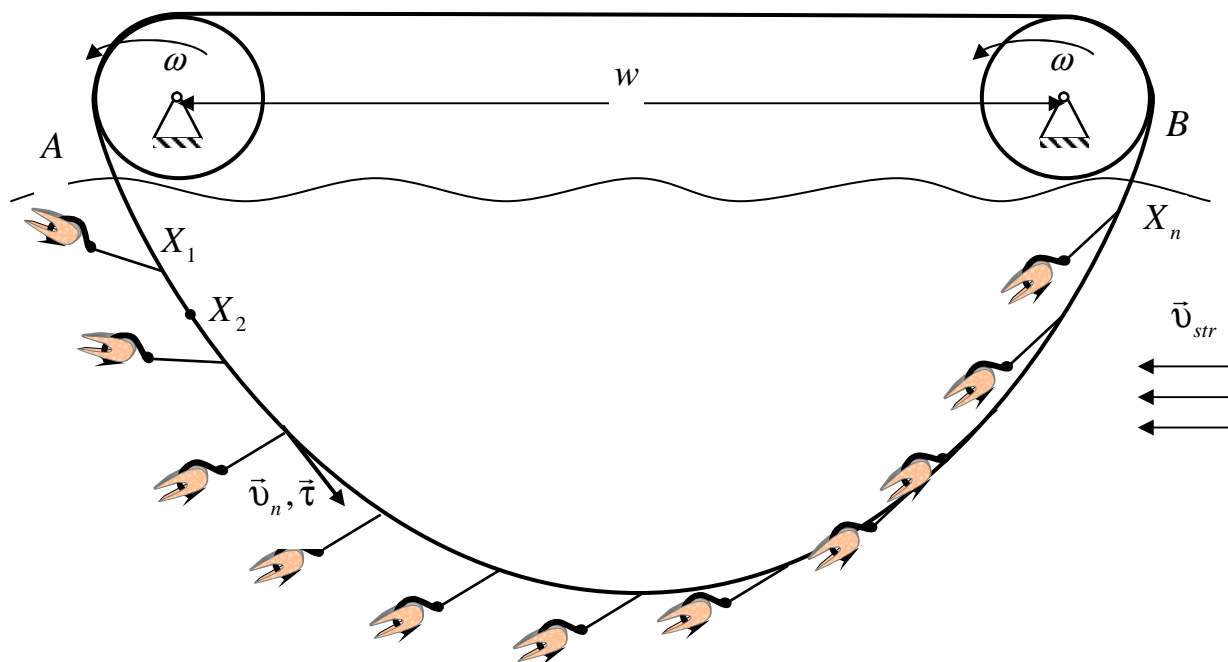


Рис. 1. Кольцевой ярус
Fig. 1. The ring longline

В работе [1] описана производительность данного и показана схема привода, однако методики расчета конструкции кольцевого яруса в литературе не изложены. Поэтому целью данной работы является разработка методики расчета кольцевого яруса, которая позволит определять форму кольцевого яруса с нахождением положения крючков относительно хребтины, за счет регулирования скорости кольцевания \bar{v}_n , конструктивной структурой яруса (расстоянием между поводцами, длиной поводцов, параметрами наживки, диаметром хребтины) и расстоянием w .

Результаты и их обсуждение

На промысле кольцевым ярусом он перематывается с постоянной скоростью ($\omega = const$) с одного барабана на другой. В этом случае задача расчета яруса соответствует задачи движению тяжелой нити вдоль линии кажущегося покоя в сопротивляющейся среде, изложенной в работе [2], только дополнительным условием задачи является неоднородность яруса, связанная с наличием поводцов и пойманной рыбы.

Для расчета данной системы воспользуемся системой моделирования, изложенной в работе [3]. Поскольку в нашем случае хребтина перематывается, то возникает дополнительное сопротивление хребтины (сила трения). В этом случае сила трения направлена параллельно и в обратную сторону вектора $\bar{\tau}$ ($\bar{R}_n \uparrow \downarrow \bar{\tau}$), тогда уравнения гибкой нити [4] примет вид

$$\begin{aligned} \dot{T} &= q_z \sin \alpha \cos \varphi - (r_{xv} \cos \alpha + r_{xn}) + r_{zv} \sin \alpha; \\ \dot{\alpha} &= (q_z \cos \alpha \cos \varphi + r_{xv} \sin \alpha + r_{zv} \cos \alpha) / (T + r_{xn}); \\ \dot{\varphi} &= -(q_z \sin \varphi + r_{yv}) / ((T + r_{xn}) \sin \alpha); \quad r_{xn} = C_{xn} (0^0) \frac{\rho v_n^2}{2} d, \end{aligned} \quad (1)$$

где v_n – скорость нити (скорость кольцевания); r_{xn} – сопротивление движения нити, приходящиеся на единицу ее длины.

В отличие от расчетов ярусов, где хребтина не движется, для кольцевого яруса расчет характеристик системы *поводец – наживка* необходимо производить для каждого соединения с хребтиной, поскольку на эту систему влияет v_n направленная параллельно вектору $\bar{\tau}$ (см. рис. 1).

Рассмотрим силы, действующие на наживку (рис. 2), расчет которых запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{-R_y^{str}}{R_z^{str} + Q_z}; \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{-R_z^{str} + Q_z}{(R_x^{str} + R_x^n \cos \alpha^\tau) \cos \varphi_0}; \\ T_0^2 &= R_x^2 + R_y^2 + (R_z + Q_z)^2 + (R_x^n \cos \alpha^\tau)^2; \quad Q_z = k_w M g; \\ R_x^n &= C_x (0^0) \frac{\rho v_n^2}{2} S; \quad R_x = C_x \frac{\rho v_{str}^2}{2} S, \quad (x, y, z), \end{aligned} \quad (2)$$

где Q – вес в воде; M – масса; R_x, R_y, R_z – проекции гидродинамической силы по \bar{v}_{str} на оси x, y, z земной системы координат ($z \downarrow \downarrow g$); R_x^n – проекции гидродинамической силы по \bar{v}_n , который в первом приближении совпадает с вектором $\bar{\tau}$ хребтины в точке соедине-

ния с поводцом, а α^f – угол атаки крена плоскости потока хребтины; k_w – коэффициент веса в воде; C_x, C_y, C_z – коэффициенты гидродинамических сил; S – характерная площадь объекта; (x, y, z) – символ круговой перестановки индексов; T_0 – натяжение в точке соединения с другим объектом; α_0, φ_0 – угол атаки и крена плоскости потока объекта.

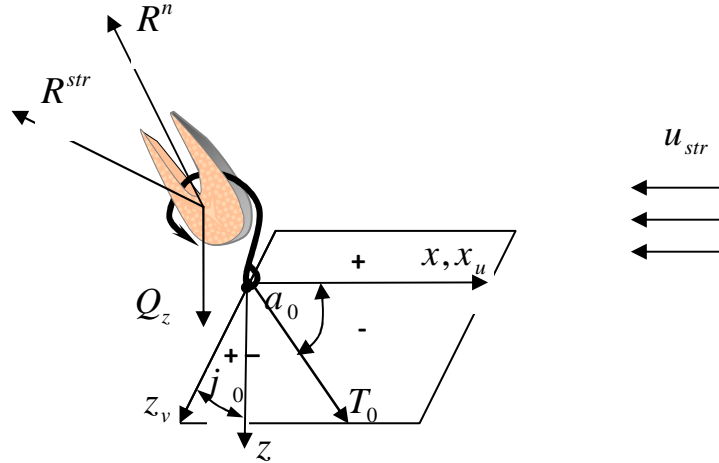


Рис. 2. Силы, действующие на наживку кольцевого яруса
Fig. 2. The forces acting on the ring bait longline

При расчете кольцевого яруса расчетом поводцов можно пренебречь, поскольку они имеют диаметр до 1 мм и длину до 300 мм, вследствие чего их гидродинамическое сопротивление на порядок меньше сопротивления наживки, поэтому

$$T_0^{нов} \approx T_0^{наж}; \quad \alpha_0^{нов} \approx \alpha_0^{наж}; \quad \varphi_0^{нов} \approx \varphi_0^{наж}. \quad (3)$$

Расчет граничных условий в месте соединения поводца с хребтиной найдем по формулам [3]

$$\operatorname{tg} \varphi_1^0 = \frac{\sum_{i=1}^n T_i \sin \alpha_i \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n T_i \sin \alpha_i \cos \varphi_i}; \quad \operatorname{tg} \alpha_1^0 = \frac{\sum_{i=1}^n T_i \sin \alpha_i \cos \varphi_i}{\cos \varphi_1^0 \sum_{i=1}^n T_i \cos \alpha_i}; \quad T_1^0 \cos \alpha_1^0 = \sum_{i=1}^n T_i \cos \alpha_i, \quad (4)$$

где i -й входной канат; n – количество входных канатов.

При попадании на крючок усилие T_f , создаваемое гидробионтом, передается поводцу, тогда вместо расчета характеристик наживки начальными параметрами для поводца являются T_f, α_f, φ_f , где α_f – угол атаки, а φ_f – угол крена плоскости потока вектора усилия T_f , создаваемого гидробионтом, тогда

$$T_0^{нов} = T_f; \quad \alpha_0^{нов} = \alpha_f; \quad \varphi_0^{нов} = \varphi_f. \quad (5)$$

Для загрузки кольцевого яруса, как правило, на хребтине между поводцами закрепляют груза. Расчет грузов можно производить по формулам (2), а в месте соединения груза с хребтиной – по формулам (4).

Алгоритм расчета. В систему вводятся характеристики яруса, расстояние AB , скорость течения v_{str} и кольцевания v_n , затем:

1. Задаемся углом α .
2. Рассчитываем характеристики хребтины по уравнениям (1) из точки A до точки X_1 .
3. Находим характеристики наживки по формулам (2).
4. Определяем параметры поводца из условия (3).
5. Рассчитываем по (4) T_0 , α_0 , φ_0 в узловом соединении X_1 .
6. Рассчитываем характеристики хребтины по уравнениям (1) из точки X_1 до точки X_2 .
7. Находим характеристики груза по формулам (2).
8. Рассчитываем по (4) T_0 , α_0 , φ_0 в узловом соединении X_2 .
9. Рассчитываем характеристики хребтины (п. 2-8) до точки B .
10. Если значения координат в точке B с некоторым допущением совпадают с расчетными значениями, то расчет заканчивается, если нет, то, используя модуль Recurrent [3], изменяем α и переходим к п. 1.

В случае моделирования формы яруса с учетом попадания гидробионтов на крючок п. 4 меняем условие (3) на (5), при этом методика позволяет учитывать произвольное попадание гидробионтов на любой крючок моделируемого кольцевого яруса.

Выводы

В работе приведена методика расчета кольцевого яруса, которая позволяет моделировать его параметры, решать задачи по совершенствованию конструкции кольцевого яруса и процесса его добычи. Важной особенностью методики является возможность задаваться T_f , α_f , φ_f и попаданием на крючки как произвольно, так и с учетом поведения гидробионта.

Список литературы

1. Максимович А.Л. Промысел рыб вертикальными ярусами // Науч. тр. Дальрыбвтуза. – Владивосток, 2008. – № 20. – С. 111-116.
2. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1960. – 240 с.
3. Осипов Е.В. Объектно-ориентированные методы расчета орудий рыболовства. – Владивосток: ТИПРО-Центр, 2009. – 89 с.
4. Габрюк В.И., Кокорин Н.В., Осипов Е.В., Чернецов В.В. Механика орудий рыболовства. – Владивосток: ТИПРО-Центр, 2006. – 304 с.

Сведения об авторе: Осипов Евгений Валериевич, кандидат технических наук, доцент, e-mail: oev@mail.ru.

УДК 519.22./25

Т.А. Рыжкина, З.П. Старовойтова

Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОГО «БЕЛОГО ШУМА» С ОПРЕДЕЛЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

На примере процесса, называемого «белым шумом», обсуждаются методы, приемы, на основании которых сложные по своей природе реальные процессы описываются достаточно простыми моделями с возможностью воспроизводства данных в условиях одного испытания. Такая модель как авторегрессия с определенными параметрами позволяет на выходе получать требуемые свойства.

Ключевые слова: стационарность, авторегрессия, имитация случайной последовательности.

T.A. Ryzhkina, Z.P. Starovoytova

TRANSFORMATIONS OF FLAT WHITE NOISE WITH CERTAIN PROPERTIES OF TARGET CHARACTERISTICS

In work on an example of the process called by white noise, methods, receptions on the basis of which real processes difficult by the nature are described by rather simple models with possibility of re-production of data in the conditions of one test are discussed. Such model autoregression with certain parameters allows to receive demanded properties on an exit.

Key words: stationarnost, autoregression, imitation of casual sequence.

Введение

Объектами исследования служат стохастические процессы и их реализации в виде временных рядов.

Набор случайных переменных $X(t)$, где t – время (в общем случае – подмножество или множество действительных чисел), называется стохастическим процессом.

В работе не делается различия между стохастическим процессом $X(t)$ и порожденным с его помощью временным рядом, если процесс обладает свойством стационарности, хотя бы в слабом смысле.

Статистико-математический анализ различных процессов предполагает, прежде всего, получение информации о развитии процесса в настоящий момент, предсказание показателей процесса в течение кратковременного периода с учетом преамбулы данных и степени их влияния на процесс. Интерес в данной работе представляют стохастические эргодические стационарные процессы, а также направленные процессы без циклов, имеющие случайные остатки в виде стационарного «белого шума», в частности гауссовского «белого шума».

1. Цель исследования. Необходимые сведения из теории стационарных стохастических процессов

Целью данной работы является разработка достаточно устойчивой статистики. На ее основе требуется имитировать одномерный стохастический процесс – плоский белый шум. Таковую модель можно проиграть во времени в виде одного испытания. На базе созданного случайного поля с помощью авторегрессионных моделей (преобразователей) следует получить аппроксимацию рассматриваемого явления с меньшим числом параметров и с более простыми свойствами.

Применяется метод имитационного моделирования. Он позволяет строить модели, описывающие процессы так, как они проходили в действительности. Изучаемый реальный объект заменяется моделью с достаточной степенью точности его описания. Экспериментирование с моделью называют имитацией [1].

1.1. Некоторые общие понятия, определения, известные результаты, необходимые в исследовании

Основные теоретические характеристики процесса $X(t)$ и аппроксимирующие их выборочные характеристики определяются следующим образом.

Математическим ожиданием $X(t)$ называют неслучайную функцию $m_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно математическому ожиданию сечения $X(t)$, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

Для генерации случайных чисел (элементов временного ряда) к фиксированному моменту t роль $m_x(t)$ исполняет средняя постоянная величина как несмещенная, состоятельная оценка математического ожидания процесса.

Дисперсией $X(t)$ называют неслучайную неотрицательную функцию $D_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно дисперсии сечения процесса, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$D_x(t) = D[X(t)].$$

Выборочная дисперсия для выделенного отрезка временного ряда служит состоятельным аналогом $D_x(t)$.

Средним квадратическим отклонением процесса $X(t)$ называют квадратный корень из дисперсии $D_x(t)$:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение σ , найденное для соответствующей процессу $X(t)$ генерации $x(t)$, является эффективной оценкой среднего квадратического отклонения процесса $X(t)$.

Корреляционной или автоковариационной функцией процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию $K_x(t_1, t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2 , значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту центрированных сечений процесса $X(t)$, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)].$$

Реализации центрированного $X(t)$ представляют собой отклонения процесса $X(t)$ от его математического ожидания; эти отклонения имеют как положительные, так и отрицательные значения, а в среднем равны нулю. Иногда для удобства рассуждений рассматривают стандартизованные, центрированные случайные функции с характеристиками $m_x(t) = 0$, $\sigma(t) = 1$ ввиду простого перехода к исходным значениям.

Стационарным процессом в слабом смысле называют стохастический процесс, для которого среднее и дисперсия независимо от рассматриваемого периода времени имеют постоянное значение. Автоковариация зависит только от длины лага $\tau = t_1 - t_2$ между рассматриваемыми переменными t_1, t_2 . С физической точки зрения такой процесс представляет колебания относительно некоторого постоянного значения, а стохастическая зависимость между двумя сечениями регулируется только расстоянием между ними.

Понятие «эргодичность» делает возможным оценивание характеристик стохастического процесса только по одной его достаточно длинной реализации – временному ряду. **Достаточным условием для эргодичности стационарного $X(t)$** по математическому ожиданию и автоковариации является сходимость автоковариации $K_x(\tau)$ к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, [1-5]. Очевидно, что дисперсия также стремится к нулю.

Процесс, называемый стационарным «белым шумом», – чисто случайный процесс, т.е. ряд одинаково распределенных случайных величин, характеризующийся постоянной средней величиной, постоянной дисперсией ошибки, некоррелированными значениями ряда, $K_x(t_1, t_2) = 0, t_1 \neq t_2$ [1-3]. Это своего рода абстракция.

«Белый шум» можно представить как предельный случай последовательности очень коротких импульсов, амплитуда которых представляет собой независимые случайные величины с очень большой дисперсией, при этом отношение дисперсии этих импульсов к частоте их появления является постоянной конечной величиной [1, 4]. На практике такими процессами могут быть естественные помехи в каналах связи, «тепловые шумы», колебания плотности физических сред и др.

Под **гауссовским «белым шумом»** в данной работе будем понимать нормальный стохастический процесс как совместное нормальное распределение двух его разных сечений.

Можно доказать, что стационарный «белый шум», представляющий собой систему одинаково распределенных нормальных, независимых случайных величин, не является нормальным. Действительно, по закону совместного распределения двух разных сечений этого процесса следует, что сечения, имеющие вероятность, отличную от нуля, совпадают. Это противоречит определению нормального процесса. Вероятность равенства двух случайных величин по нормальному закону равна нулю. Однако стационарность в слабом смысле у этого процесса имеется [1-9].

Плотность распределения дисперсий по частотам непрерывного спектра стационарного процесса называется его спектральной плотностью. Это функция вида

$$S_x(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D_k}{\Delta\omega}.$$

Корреляционная функция и спектральная плотность стационарного $X(t)$ связаны друг с другом прямым и обратным преобразованиями Фурье [4-9]. В экспоненциальном виде эти формулы имеют вид

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Спектральная плотность так называемого «белого шума» постоянна. Ее обычно полагают равной константе в определенном диапазоне частот. Обозначим эту постоянную символом q . Коэффициент $2\pi q$ называют интенсивностью частот. Корреляционную функцию определяют с помощью δ -функции:

$$K_x(\tau) = 2\pi q \delta(\tau),$$

где
$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0 \\ +\infty, & \tau = 0. \end{cases}$$

2. Имитация плоского «белого шума»

Итак, скалярный процесс $X(t)$ называют «белым шумом», если он является стационарным и обладает постоянной спектральной плотностью. Неслучайные частоты не коррелируются [4, 9].

В основе всех методов и приемов моделирования различных факторов и ситуаций (событий, систем случайных величин и пр.) лежит использование случайных чисел [8, 10], равномерно распределенных на интервале [0; 1].

Вместо физического генератора, способного выдавать длительное время случайные числа r указанного качества, используется генератор псевдослучайных чисел (ПСЧ). Последовательность ПСЧ получается с помощью детерминированных рекуррентных формул. ПСЧ, несмотря на случайность и равномерность распределения, остаются полностью детерминированными.

Это позволяет воспроизводить последовательность ПСЧ с одними и теми же исходными данными. Например:

$$m_r = \frac{1}{2}; \quad \sigma_r = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

В центре наблюдений предполагается, что $r \in (m_r - \alpha\sigma_r; m_r + \alpha\sigma_r)$, где $\alpha = \alpha(n)$ – функция от номера статистического испытания (например, $\alpha = \frac{3}{2n}$).

Цикл генератора ПСЧ – интервал по номеру $n \in [-15;15]$. Розыгрыш номеров и самих чисел r проводится из интервала

$$\left(0,5 - \frac{3}{4n\sqrt{3}}; 0,5 + \frac{3}{4n\sqrt{3}} \right).$$

Последовательность $\alpha(n)$ с учетом знака по циклу генератора представлена в табл. 1.

Таблица 1

Последовательность $\alpha(n)$ с учетом знака по циклу генератора

Table 1

Sequence $\alpha(n)$ taking into account a sign on a generator cycle

n	$sign(n) \cdot \alpha(n)$	n	$sign(n) \cdot \alpha(n)$
1	-0,433013	-15	0,0288675
2	-0,216506	-14	0,0309295
3	-0,144338	-13	0,0333087
4	-0,108253	-12	0,0360844
5	-0,0866025	-11	0,0393648
6	-0,0721688	-10	0,0433013
7	-0,061859	-9	0,0481125
8	-0,0541266	-8	0,0541266
9	-0,0481125	-7	0,061859
10	-0,0433013	-6	0,0721688
11	-0,0393648	-5	0,0866025
12	-0,0360844	-4	0,108253
13	-0,0333087	-3	0,144338
14	-0,0309295	-2	0,216506
15	-0,0288675	-1	0,433013

Последовательность ПСЧ – это ряд случайных чисел, вычисляемых по формуле

$$r_k = 0,5 + \text{sign}(n) \cdot \alpha(n), \quad n \in [-15; 15]. \quad (1)$$

Рассмотрим случайную величину ε_t , имеющую нормальное распределение,

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &\sim N(0; 1). \\ f(\varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon_t^2}{2}}; \quad F(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad F(\varepsilon) = p(\varepsilon_t < \varepsilon_r) = r. \end{aligned} \quad (2)$$

Система уравнений (2) для чисел r_k принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon_{rk}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = r_k.$$

С учетом того, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon_{rk}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = r_k - 0,5, \quad (3)$$

где r_k – генерация ПСЧ (1) из интервала (0; 1). Ряд случайных чисел ε_{rk} составляет предмет рассмотрения.

Вычислительные процедуры в статистическом пакете по формуле (3) связаны с обратным преобразованием к функции Лапласа [6-8].

Разыграна ситуация $\varepsilon_{rk} = X(t)$, представленная табл. 2.

Числовые характеристики:

$$m_t = \frac{\sum_{t=1}^{30} X_t}{30} = 0, \quad \sigma_t^2 = \left(\frac{\sum_{t=1}^{30} X_t^2}{30} \right) - m^2 = 0,198, \quad \sigma_t = \sqrt{\sigma_t^2} = 0,445.$$

Для проверки стационарности данного ряда был проведен расчет выборочного коэффициента автокорреляции (нормированной автоковариации) ρ_τ по формуле

$$\rho_\tau = \frac{(n-\tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} x_t x_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} x_t \sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau}}{\sqrt{(n-\tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} x_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} x_t \right)^2} \sqrt{(n-\tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau} \right)^2}}. \quad (4)$$

Результаты: $\rho_1 = 0,787504$, $\rho_2 = 0,652205$, $\rho_3 = 0,573963$, $\rho_4 = 0,525558$,
 $\rho_5 = 0,494783$, $\rho_6 = 0,475492$, $\rho_7 = 0,464256$.

Таблица 2

Случайная последовательность нормально распределенных чисел

Table 2

Casual sequence of normally distributed numbers

t	X_t	t	X_t
1	-1,49861	16	0,0724234
2	-0,572494	17	0,0776065
3	-0,370077	18	0,0835897
4	-0,274769	19	0,0905738
5	-0,218814	20	0,0988336
6	-0,181898	21	0,108754
7	-0,155684	22	0,120894
8	-0,136094	23	0,136094
9	-0,120894	24	0,155684
10	-0,108754	25	0,181898
11	-0,0988336	26	0,218814
12	-0,0905738	27	0,274769
13	-0,0835897	28	0,370077
14	-0,0776065	29	0,572494
15	-0,0724234	30	1,49861

Очевидно, что связь между уровнями ряда постепенно ослабевает, т.е. подтверждается признак стационарного временного ряда. С увеличением лага τ взаимосвязь членов временного ряда x_t и $x_{t+\tau}$ ослабевает и автокорреляционная функция $\rho(\tau)$ должна убывать (по абсолютной величине). Дисперсия ошибки мала, имеет порядок (-1). Ряд представляет случайные колебания относительно нулевого уровня (рис. 1).

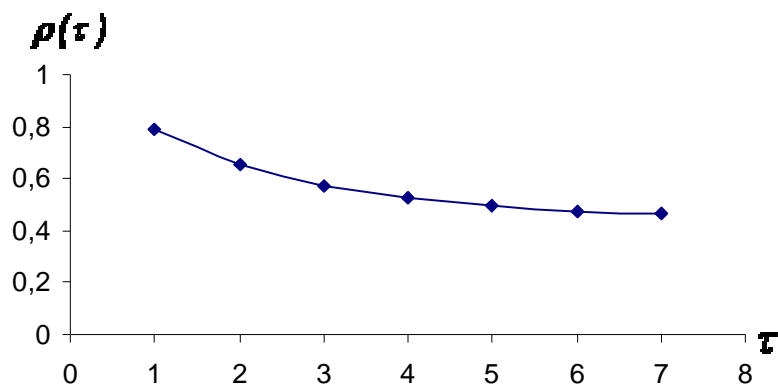


Рис. 1. График нормированной автоковариации $\rho(\tau)$
 Fig. 1. Schedule of normirovanny autocovariance $\rho(\tau)$

На основании случайной выборки из массива ПСЧ [8, приложение] получены еще пять случайных последовательностей нормально распределенных чисел. Последовательности ПСЧ получаем по равномерному распределению с теми же числовыми характеристиками.

Полученные примеры представлены в табл. 3-6.

Таблица 3

Второй пример случайной последовательности нормально распределенных чисел

Table 3

The 2nd example of casual sequence of normally distributed numbers

r_k	ε_{r_k}	r_k	ε_{r_k}
0,0669873	-1,49861	0,528868	0,0724234
0,283494	-0,572494	0,530929	0,0776065
0,355662	-0,370077	0,533309	0,0835897
0,391747	-0,274769	0,536084	0,0905738
0,413397	-0,218814	0,539365	0,0988336
0,427831	-0,181898	0,543301	0,108754
0,438141	-0,155684	0,548113	0,120894
0,445873	-0,136094	0,554127	0,136094
0,451887	-0,120894	0,561859	0,155684
0,456699	-0,108754	0,572169	0,181898
0,460635	-0,0988336	0,586603	0,218814
0,463916	-0,0905738	0,608253	0,274769
0,466691	-0,0835897	0,644338	0,370077
0,469071	-0,0776065	0,716506	0,572494
0,471132	-0,0724234	0,933013	1,49861

Числовые характеристики этого ряда:

математическое ожидание $m_x = 0$, дисперсия $\sigma_x^2 = 0,198162$,коэффициенты корреляции $\rho_1 = 0,482811$, $\rho_2 = 0,350661$, $\rho_3 = 0,282033$, $\rho_4 = 0,238215$,
 $\rho_5 = 0,206754$, $\rho_6 = 0,182157$, $\rho_7 = 0,161471$; ...

Таблица 4

Третий пример случайной последовательности нормально распределенных чисел

Table 4

The 3rd example of casual sequence of normally distributed numbers

r_k	ε_{r_k}	r_k	ε_{r_k}
0,355662	-0,370077	0,509623	0,0241224
0,427831	-0,181898	0,51031	0,0258458
0,451887	-0,120894	0,511103	0,0278344
0,463916	-0,0905738	0,512028	0,0301546
0,471132	-0,0724234	0,513122	0,0328969
0,475944	-0,0603367	0,514434	0,036188
0,47938	-0,0517088	0,516038	0,0402109
0,481958	-0,0452405	0,518042	0,0452405
0,483962	-0,0402109	0,52062	0,0517088
0,485566	-0,036188	0,524056	0,0603367
0,486878	-0,0328969	0,528868	0,0724234
0,487972	-0,0301546	0,536084	0,0905738
0,488897	-0,0278344	0,548113	0,120894
0,48969	-0,0258458	0,572169	0,181898
0,490377	-0,0241224	0,644338	0,370077

Числовые характеристики ряда 3:

математическое ожидание $m_x = -1,4803 \times 10^{-17}$, дисперсия $\sigma_x^2 = 0,0142275$,

коэффициенты корреляции $\rho_1 = 0,60104$, $\rho_2 = 0,450757$, $\rho_3 = 0,367182$, $\rho_4 = 0,311902$,
 $\rho_5 = 0,271152$, $\rho_6 = 0,238519$, $\rho_7 = 0,210412$;...

Таблица 5

Четвертый пример случайной последовательности нормально распределенных чисел

Table 5

The 4th example of casual sequence of normally distributed numbers

r_k	ε_{r_k}	r_k	ε_{r_k}
-0,378807	-1,16904	0,0252538	0,0633443
-0,189404	-0,494161	0,0270577	0,0678756
-0,126269	-0,321988	0,029139	0,0731057
-0,0947018	-0,239657	0,0315673	0,0792102
-0,0757614	-0,191062	0,034437	0,0864283
-0,0631345	-0,158921	0,0378807	0,095096
-0,0541153	-0,136066	0,0420897	0,1057
-0,0473509	-0,118971	0,0473509	0,118971
-0,0420897	-0,1057	0,0541153	0,136066
-0,0378807	-0,095096	0,0631345	0,158921
-0,034437	-0,0864283	0,0757614	0,191062
-0,0315673	-0,0792102	0,0947018	0,239657
-0,029139	-0,0731057	0,126269	0,321988
-0,0270577	-0,0678756	0,189404	0,494161
-0,0252538	-0,0633443	0,378807	1,16904

Числовые характеристики ряда 4:

математическое ожидание $m_x = 0$, дисперсия $\sigma_x^2 = 0,127622$,

коэффициенты корреляции $\rho_1 = 0,28869$, $\rho_2 = 0,388284$, $\rho_3 = 0,313652$, $\rho_4 = 0,265439$,
 $\rho_5 = 0,230505$, $\rho_6 = 0,202957$, $\rho_7 = 0,179582$;...

Таблица 6

Пятый пример случайной последовательности нормально распределенных чисел

Table 6

The 5th example of casual sequence of normally distributed numbers

r_k	ε_{r_k}	r_k	ε_{r_k}
1	2	3	4
-0,057735	-0,145229	0,003849	0,00964817
-0,0288675	-0,0724234	0,00412393	0,0103373
-0,019245	-0,0482588	0,00444116	0,0111326
-0,0144338	-0,036188	0,00481125	0,0120603
-0,011547	-0,0289481	0,00524864	0,0131568
-0,0096225	-0,0241224	0,0057735	0,0144725
-0,00824786	-0,0206758	0,006415	0,0160807

Окончание табл. 6

1	2	3	4
-0,00721688	-0,018091	0,00721688	0,018091
-0,006415	-0,0160807	0,00824786	0,0206758
-0,0057735	-0,0144725	0,0096225	0,0241224
-0,00524864	-0,0131568	0,011547	0,0289481
-0,00481125	-0,0120603	0,0144338	0,036188
-0,00444116	-0,0111326	0,019245	0,0482588
-0,00412393	-0,0103373	0,0288675	0,0724234
-0,003849	-0,00964817	0,057735	0,145229

Числовые характеристики ряда 5:

математическое ожидание $m_x = -2,03541 \times 10^{-17}$, дисперсия $\sigma_x^2 = 0,00221735$,

коэффициенты корреляции $\rho_1 = 0,608162$, $\rho_2 = 0,457223$, $\rho_3 = 0,372812$, $\rho_4 = 0,316821$,
 $\rho_5 = 0,275465$, $\rho_6 = 0,242291$, $\rho_7 = 0,213671$;...

Проведем усреднение последних четырех реализаций по формуле математического ожидания случайного процесса

$$M_x(t) = \sum_{k=1}^4 p_k(t) \cdot X_k(t),$$

где $t = 1, 2, \dots, 30$.

Получаем усредненный ряд, представленный в табл. 7.

Таблица 7

Результат усреднения

Table 7

Result of averaging

t	ε_{r_k}	t	ε_{r_k}
1	0,201699	16	0,000716223
2	0,041854	17	0,000822272
3	0,0181913	18	0,000953753
4	0,0101577	19	0,0011195
5	0,00647937	20	0,00133255
6	0,00449153	21	0,00161279
7	0,00329637	22	0,00199177
8	0,00252203	23	0,00252203
9	0,00199177	24	0,00329637
10	0,00161279	25	0,00449153
11	0,00133255	26	0,00647937
12	0,0011195	27	0,0101577
13	0,000953753	28	0,0181913
14	0,000822272	29	0,041854
15	0,000716223	30	0,201699

Числовые характеристики этого ряда:

математическое ожидание $m_x = 0.019816$, дисперсия $\sigma_x^2 = 0.00247128$,

коэффициенты корреляции $\rho_1 = 0,207378$, $\rho_2 = 0,0824471$, $\rho_3 = 0,0354722$,
 $\rho_4 = 0,0101516$, $\rho_5 = 0,00704812$.

Представим графически последние пять реализаций (рис. 2).

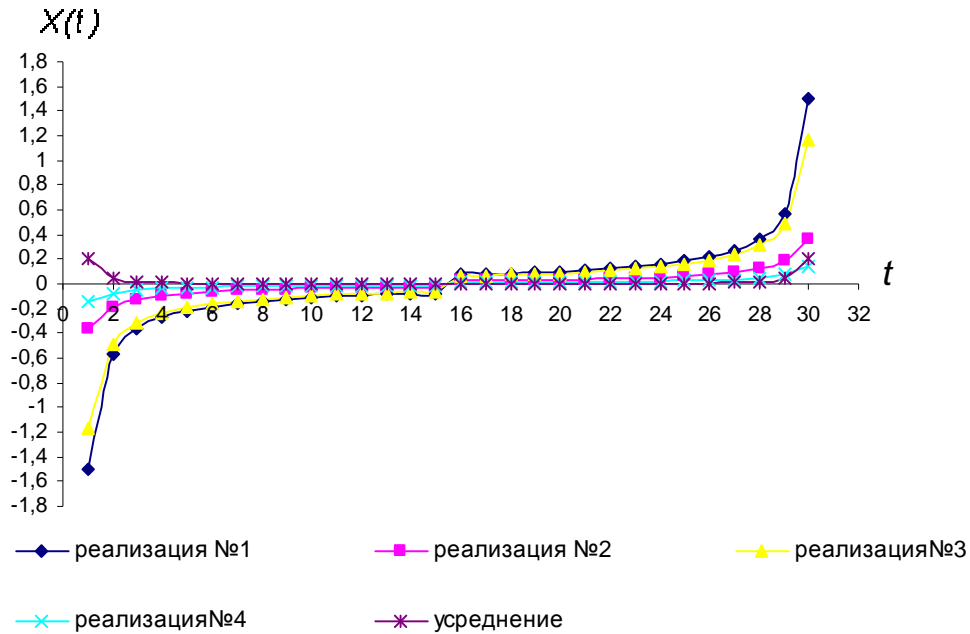


Рис. 2. Графическое представление стационарных рядов
 Fig. 2. Graphic representation of stationary ranks

3. Создание устойчивого линейного фильтра для системы $X(t)$

Линейные преобразователи стационарных процессов наиболее полно изучены с помощью механизма передаточных функций, $\rho(\tau)$ характеристических уравнений для авторегрессионных моделей, их корней, в частности, кратных корней [1].

Сложная природа полученного случайного поля может быть выражена через другую переменную с более простыми свойствами. Поведение исследуемого процесса аппроксимируется на основе текущего значения и одного или двух прошлых значений процесса. В этом суть преобразований, иными словами, адаптации явления к текущему моменту.

Одномерная модель авторегрессии длины m имеет вид

$$x_t = \alpha_0 + \sum_{\tau=1}^m \alpha_\tau x_{t-\tau} + \beta \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Оператор лага L^τ , или оператор обратного действия, выполняет в модели (5) роль, подобную той, что оператор $\frac{d^k}{dx^k}$ выполняет в однородном линейном дифференциальном уравнении n -го порядка. Аппарат характеристических уравнений для однородных дифференциальных уравнений n -го порядка позволяет получить любое решение таких уравнений. Разработана доказательная база возможности использования отмеченной аналогии в

деле построения авторегрессии. К ней также применимо понятие характеристического уравнения. В зависимости от корней характеристического уравнения авторегрессионной модели (они по абсолютной величине должны быть больше единицы) адаптивный механизм может сохранять свойство стационарности преобразуемого процесса, в том числе уменьшать дисперсию ошибки. В противном случае, когда имеются корни характеристического уравнения модели (5), меньшие единицы по модулю, аппроксимирующий процесс перестает быть устойчивым, теряет свойство стационарности.

Выполним приближение текущих значений x_t первого ряда с помощью ранних значений $x_{t-\tau}$. Для этого используем авторегрессию первого порядка:

$$\hat{x}_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}. \quad (6)$$

По построению случайной последовательности ошибка от использования формулы (6) не коррелируется с x_{t-1} , т.е. будем считать, что дисперсия ошибки случайной составляющей для (6) однородная. С помощью математического пакета находим

$$\alpha_0 = 0,0923715, \quad \alpha_1 = 0,787504.$$

Составим характеристическое уравнение $1 - \alpha_0 - \alpha_1 \cdot z = 0$. Его корень $z = 1,15254$. По модулю он больше 1. Это означает, что полученная модель авторегрессии представляет устойчивый фильтр для рассматриваемой реализации по отношению к стационарности. Следовательно, предыдущие значения случайного ряда практически не влияют на текущие значения.

Для авторегрессии второго и третьего порядков

$$\hat{x}_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2}, \quad \hat{x}_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-3}$$

выполняются аналогичные процедуры в математическом пакете. По найденным коэффициентам получаем корни характеристического уравнения: $z_1 = 0,538901$, $z_2 = 2,9021$ для второго порядка и $z_1 = 0,387588$, $z_2 = 1,28363$, $z_3 = 11,0376$ для третьего порядка соответственно, что говорит о неустойчивости процесса на выходе.

Рассмотрим шестой пример реализации эргодического стационарного процесса. Представим текущие значения данного ряда в виде линейного потока предыдущих значений, воспользовавшись авторегрессионной моделью первого порядка:

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (7)$$

Коэффициенты α_0, α_1 формулы (7) следующие: $\alpha_0 = 0,0088883$, $\alpha_1 = 0,343755$.

Авторегрессионная модель имеет вид $x_t = 0,0088883 + 0,343755 x_{t-1} + \varepsilon_t$.

Построим для этой модели характеристическое уравнение

$$1 - 0,0088883 - 0,343755 \cdot z = 0.$$

Его корень $z = 2,88319$.

Поскольку корень лежит вне единичного круга с центром в нуле, то это говорит о стационарности данной модели.

Выходные числовые характеристики для этой модели:

математическое ожидание $m_x = 0,0135442$, дисперсия $\sigma_x^2 = 0,000162649$, коэффициенты автокорреляции $\rho_1 = 0,217821$, $\rho_2 = 0,090791$, $\rho_3 = 0,0427131$, $\rho_4 = 0,0170847$, $\rho_5 = 0,0000651894$. С увеличением лага τ коэффициент автокорреляции ρ_τ убывает по абсолютной величине.

В рассматриваемых вариантах для проверки стационарности процесса достаточно анализа семи значений коэффициента автокорреляции [1, 3, 4].

Модели авторегрессии более высокого порядка могут обеспечивать процесс на выходе с не худшими характеристиками в случае кратных корней характеристического уравнения.

Заключение

Приведенные примеры создания случайных полей и построения адаптивных механизмов аппроксимации на их основе показывают эффективность статистико-математического анализа, математического моделирования в решении прикладных задач, связанных с получением желаемых физических характеристик. Алгоритмы построения и вычислительные процедуры разработаны авторами работы. В частности, примеры показывают, что при тех же исходных условиях одного статистического испытания можем воспроизводить разные случайные числовые последовательности с одинаковыми свойствами.

Список литературы

1. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.
3. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др.; под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 576 с.
4. Хрущева И.В., Щербаков В.И., Леванова Д.С. Основы математической статистики и теории случайных процессов: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 336 с.
5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: учеб. пособие / под общ. ред. А.А. Свешникова. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 448 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1999. – 575 с.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1972. – 368 с.
8. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1971. – 328 с.
9. Сборник задач по математике. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 428 с.
10. Эконометрика: учебник / под ред. В.Б. Уткина. – М.: Изд-во «Дашков и К°», 2009. – 564 с.

Сведения об авторах: Рыжкина Тамара Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент;

Старовойтова Зоя Павловна, доцент.